9. *Тиман А.Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. – 427 с.

10. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Московского университета, 1976. – 168 с.

11. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М: Наука, 1986. – 272 с.

12. *Yao A.C.* Some complexity questions related to distributive computing //Proc. 11th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, 1979. – P. 209-213.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ОБЛАСТИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛОТИНЕ[1]

Абушов О.Г., Лапин А.В.

НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета

1. Рассмотрим задачу фильтрации воды под действием силы тяжести через плотину, представленную областью $\tilde{\Omega}$. Считаем, что плотина на горизонтальном непроницаемом основании разделяет два водных бассейна с высотами $H_1 > H_2 \geq 0$. Пусть напор $u(x)$ и скорость фильтрации $\bar{v}(x)$ связаны нелинейным законом фильтрации

$$\bar{v}(x) = -k(|\nabla u|^2)\nabla u,$$

где k удовлетворяет при всех $x \in \tilde{\Omega}, \xi \in R^2$ следующим условиям:

1^0. функция $k(|\xi|^2)\xi_i$, $i = 1, 2$, непрерывна;

2^0. существуют производная $k'(|\xi|^2)$ и такие постоянные M и m, что $0 < m \leq 2k'(|\xi|^2)|\xi|^2 + k(|\xi|^2) \leq M$.

Функция $u(x)$ является решением краевой задачи в a priori неизвестной области фильтрации $\Omega \subset \tilde{\Omega}$:

$$\operatorname{div} \bar{v}(x) = 0, x \in \Omega; \quad u(x) = H_1, x \in \Gamma_1; \quad u(x) = H_2, x \in \Gamma_2;$$

$$\bar{v} \cdot \bar{\nu}(x) = 0, x \in \Gamma(\varphi) \cup \Gamma_N; \quad u(x) = x_2, x \in \Gamma(\varphi) \cup \Gamma(\sigma);$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 96-01-00123 и 98-01-00200.

$$\bar{v} \cdot \bar{\nu}(x) \geq 0, x \in \Gamma(\sigma).$$

Здесь $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma(\varphi) \cup \Gamma(\sigma) \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, кривые Γ_1, Γ_2 и Γ_N — известные участки границы $\partial\Omega$, $\Gamma(\varphi)$ и $\Gamma(\sigma)$ — неизвестные (депрессионная кривая и участок высачивания), $\bar{\nu}(x)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Участок высачивания $\Gamma(\sigma)$ является частью $\tilde{\Gamma}(\sigma)$ границы $\partial\Omega$ (низовой откос плотины), которая задается уравнением $x_2 = \sigma(x_1)$ с непрерывной монотонно убывающей функцией σ.

Аналогично работам [1], [2], где изучена задача о плотине с линейным законом фильтрации, будем формулировать рассматриваемую задачу в области с неизвестной границей как проблему оптимального управления этой областью. Пусть

$$\Gamma_N = \{(x_1, 0) : 0 < x_1 < c\}, \tilde{\Gamma}(\sigma) = \{x_2 = \sigma(x_1) : c_1 < x_1 < c\},$$

$$\Gamma(\varphi) = \{x_2 = \alpha(x_1) : x_1 \in (0, b_\alpha)\},$$

$$\Gamma(\sigma) = \{x_2 = \alpha(x_1) = \sigma(x_1) : x_1 \in [b_\alpha, c)\},$$

$$U_{ad} = \{\alpha(x_1) \in C[0, c] : \alpha(0) = H_1, \alpha(c) = H_2;$$

$$H_1 \geq \alpha(x_1) \geq H_2 \text{ при } x_1 \in [0, c];$$

$$\alpha(x_1) \leq \sigma(x_1) \text{ при } x_1 \in [c_1, c]\}.$$

Для фиксированного $\alpha \in U_{ad}$ сформулируем краевую задачу состояния в области $\Omega(\alpha)$:

$$\begin{array}{c} \operatorname{div} \bar{v}(x) = 0, x \in \Omega(\alpha); \quad u(x) = H_1, x \in \Gamma_1; \quad u(x) = H_2, x \in \Gamma_2; \\ u(x) = x_2, \quad x \in \Gamma(\alpha); \quad \bar{v} \cdot \bar{\nu}(x) = 0, x \in \Gamma_N. \end{array} \tag{1}$$

Остальные условия на $\Gamma(\varphi)$ и $\Gamma(\sigma)$ включим в функционал цели

$$J_\varepsilon(\alpha) = J_0(\alpha) + \frac{1}{\varepsilon} J_1(\alpha),$$

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma(\varphi)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(\alpha)\right)^2 d\Gamma, J_1(\alpha) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma(\sigma)} \left([\frac{\partial u}{\partial \nu}(\alpha)]^+\right)^2 d\Gamma, \tag{2}$$

где $u(\alpha)$ - решение задачи (1), $\varepsilon > 0$. Задача оптимального управления состоит в минимизации $J(\alpha)$ на U_{ad}. Пусть для фиксированного $\alpha \in U_{ad}$ определено множество

$$V^\Phi(\alpha) = \{u \in H^1(\Omega(\alpha)) : u = \Phi \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma(\alpha) \cup \Gamma_2\}$$

с функцией $\Phi = \{H_1$ на $\Gamma_1; x_2$ на $\Gamma(\alpha); H_2$ на $\Gamma_2\}$. Задачу (1) заменим задачей отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа на $V^{\Phi}(\alpha) \times L_2^2(\Omega(\alpha)) \times L_2^2(\Omega(\alpha))$:

$$L(u, \bar{q}, \bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega(\alpha)} \int\limits_0^{q^2} k(t) dt dx + \frac{r}{2} \int\limits_{\Omega(\alpha)} |\nabla u - \bar{q}|^2 dx + \int\limits_{\Omega(\alpha)} \bar{\lambda}(\nabla u - \bar{q}) dx, \tag{3}$$

$$q^2 = \bar{q} \cdot \bar{q}, r = const > 0.$$

Тогда функционал цели примет вид

$$J_\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma(\varphi)} (\bar{\lambda} \cdot \bar{\nu})^2 d\Gamma + \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{\Gamma(\sigma)} ([\bar{\lambda} \cdot \bar{\nu}]^+)^2 d\Gamma. \tag{4}$$

2. Аппроксимируем задачу оптимального управления сеточной схемой, считая, для простоты, область $\tilde{\Omega}$ полигональной. Пусть $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = c$ – разбиение отрезка $[0, c]$ с шагами $a_{i+1} - a_i \leq h$, фиксированное для всех $\alpha \in U_{ad}$. Проводя вертикальные линии через точки этого разбиения до пересечения с $\Gamma(\alpha)$ и разбивая каждый отрезок на m частей (с шагами $\leq h$), получим множество точек сетки, по которым строим триангуляцию $T(h, \alpha_h)$. Пусть $U_{ad}^h = \{\alpha_h(x_1) \in C[0,1] : \alpha_h|_{[a_i, a_{i+1}]} \in P_1, \alpha_h(0) = H_1, \alpha_h(c) = H_2, H_1 \geq \alpha_h(x_1) \geq H_2$ при $x_1 \in [0, c]; \alpha_h(x_1) \leq \sigma_h(x_1) = \sigma(x_1)$ при $x_1 \in [c_1, c]\}$, где P_1 – пространство полиномов первой степени. В дальнейшем считаем, что триангуляция $T(h, \alpha_h)$ непрерывно зависит от $\alpha_h \in U_{ad}^h$, т. е. бесконечно малым изменениям координат узлов $\alpha_h(x_1)$ соответствуют бесконечно малые изменения координат узлов триангуляции. Определим следующие сеточные пространства и множества:

$$V_h = \{u_h \in C(\Omega(\alpha_h)) : u_h \in P_1 \quad \forall \Delta_e \in T(h, \alpha_h)\},$$

$$V_h^{\Phi} = \{u_h \in V_h : u_h(x) = \Phi(x) \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma(\alpha_h) \cup \Gamma_2\},$$

W_h – пространство кусочно-постоянных функций на треугольниках $\Delta_e \in T(h, \alpha_h)$. Пусть размерности пространств таковы: $\dim W_h = k$, $\dim V_h = p > k$, $\dim V_h^{\Phi} = p_0 < p$.

Сеточная задача оптимального управления состоит в отыскании

$$\alpha_h^* \in U_{ad}^h : J_{\varepsilon h}(\alpha_h^*) \leq J_{\varepsilon h}(\alpha_h) \quad \forall \alpha_h \in U_{ad}^h \tag{5}$$

с функционалом цели

$$J_{\varepsilon h}(\alpha_h) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma(\varphi_n)} (\bar{\lambda}_h \cdot \bar{\nu}_h)^2 d\Gamma + \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{\Gamma(\sigma_n)} ([\bar{\lambda}_h \cdot \bar{\nu}_h]^+)^2 d\Gamma, \tag{6}$$

где $\bar{\lambda}_h$ определяется как компонент седловой точки сеточной функции Лагранжа на $V_h^{\Phi} \times W_h^2 \times W_h^2$:

$$\begin{aligned} L_h(u_h, \bar{q}_h, \bar{\lambda}_h) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega(\alpha_h)} \int\limits_0^{q_h^2} k(t)dtdx + \frac{r}{2} \int\limits_{\Omega(\alpha_h)} |\nabla u_h - \bar{q}_h|^2 dx \\ + \int\limits_{\Omega(\alpha_h)} \bar{\lambda}_h(\nabla u_h - \bar{q}_h)dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Далее обозначим через $u \in R^p, q^{(i)}, \lambda^{(i)} \in R^k, i = 1, 2$, векторы узловых параметров функций $u_h(x), q_h^{(i)}(x), \lambda_h^{(i)}(x)$ соответственно, а также положим $u = (u^0, \Phi)$, где $u^0 \in R^{p_0}$, Φ – значения $\Phi(x)$ в узлах сетки на $\Gamma_1 \cup \Gamma(\alpha_h) \cup \Gamma_2$. Введем в рассмотрение следующие матрицы:

A – матрица жесткости с элементами

$$a_{ij} = \int\limits_{\Omega_h(\alpha_h)} \nabla\theta_i(x)\nabla\theta_j(x)dx, \quad i = \overline{1,p}, j = \overline{1,p};$$

M – диагональная матрица масс с элементами

$$m_{ii} = \int\limits_{\Delta_i} dx \quad i = \overline{1,k};$$

D_l – матрица с элементами

$$d_{ij}^l = \int\limits_{\Omega_h(\alpha_h)} \frac{\partial\theta_j}{\partial x_l}\psi_i(x)dx, \quad l = 1, 2, \ i = \overline{1,k}, \ j = \overline{1,p};$$

$A = A_0 + A_1, D_l = D_{l0} + D_{l1}$, где A_0 и D_{l0} – квадратные матрицы размера $p_0 \times p_0$ (левые верхние блоки соответствующих матриц), $\{\theta_i(x)\}_{i=1}^p$ и $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^k$ – базисы V_h и W_h соответственно.

В дальнейшем евклидово скалярное произведение в конечномерном пространстве векторов обозначим через $(\cdot, \cdot)$, размерность пространства будет ясна из контекста. Тогда лагранжиан (7) может быть записан в следующей форме:

$$\begin{aligned} L_h(u_h, \bar{q}, \bar{\lambda}) = \frac{1}{2}\left(M\int\limits_0^{q^2} k(t)dt, 1\right) + \frac{r}{2}(Au, u) + \frac{r}{2}(M\bar{q}, \bar{q}) \\ -r\sum_{i=1}^2 (D_i u, q^i) + \sum_{i=1}^2 (D_i u, \lambda^i) - (M\bar{\lambda}, \bar{q}). \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть Γ^e – звено ломаной линии $\Gamma(\alpha_h)$. Поскольку $\bar{\lambda}_h(x)$ и вектор нормали $\bar{\nu}_h(x)$ постоянны на каждом Γ^e, то сеточный функционал цели имеет вид

$$J(\alpha) = J_{\varepsilon,h}(\alpha_h) = \sum_{\Gamma^e \subseteq \Gamma(\alpha_h)} \operatorname{mes}\Gamma^e \rho_l(\bar{\lambda}_h^e \bar{\nu}_h^e), \tag{9}$$

где

$$\rho_e(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s^2, & \Gamma^e \subseteq \Gamma(\varphi_h); \\ \frac{1}{2\varepsilon}(s^+)^2, & \Gamma^e \subseteq \Gamma(\sigma_h). \end{cases}$$

Таким образом, состояние задачи определяется седловой точкой лагранжиана (8), а целевой функционал имеет вид (9). Теперь задача (5) эквивалентна следующей:

$$\text{найти } \alpha^* \in U \text{ такое, что } J(\alpha^*) \leq J(\alpha) \text{ для всех } \alpha \in U, \tag{10}$$

где

$$U = \{\alpha \in R^{n+1} : H_1 \geq \alpha_i \geq H_2, \forall i;\ \alpha_0 = H_1;\ \alpha_{n+1} = H_2;$$
$$\alpha_i \leq \sigma_i \text{ для } i, \text{ соответствующих узлам на } [c_1, c]\}.$$

Пусть теперь

$$w = w(\alpha) = (u^0, q^{(1)}, q^{(2)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})^T,$$

$$F = F(\alpha) = (-rA_1\Phi, rD_{11}\Phi, rD_{21}\Phi, -D_{11}\Phi, -D_{21}\Phi)^T,$$

$$E_1 = E_1(\alpha) = \operatorname{diag}(0, M, M, 0, 0), Gw = (0, k(x, q^2)q^{(1)}, k(x, q^2)q^{(2)}, 0, 0),$$

$$E_0 = E_0(\alpha) = \begin{pmatrix} rA_0 & -rD_{10}^T & -rD_{20}^T & D_{10}^T & D_{20}^T \\ -rD_{10} & rM & 0 & -M & 0 \\ -rD_{20} & 0 & rM & 0 & -M \\ D_{10} & -M & 0 & 0 & 0 \\ D_{20} & 0 & -M & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда стационарная точка функции Лагранжа (8) является решением системы

$$E_0(\alpha)w + E_1(\alpha)Gw - F(\alpha) = 0. \tag{11}$$

Теорема 1. *При любом $\alpha \in U$ существует единственное решение задачи (11).*

Теорема 2. *При любом $h > 0$ существует решение задачи оптимального управления (5)-(7), т. е. решение $\alpha^* \in U$ задачи (10).*

3. Рассмотрим вопрос вычисления градиента функционала $J_\varepsilon(\alpha)$ для использования известных методов решения задачи оптимизации (10).

Частные производные $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}(\alpha)$, $\frac{\partial E_0}{\partial \alpha_i}(\alpha)$ и $\frac{\partial E_1}{\partial \alpha_i}(\alpha)$ определяются аналогично [2, 3]. Пусть, кроме того,

$$I_0(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ \Gamma^e \subseteq \Gamma(\varphi_h)}}^{2} \left[(\lambda_i^e \nu_i^e)^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \operatorname{mes} \Gamma^e + 2 \operatorname{mes} \Gamma^e (\lambda_i^e \nu_i^e) \left(\lambda_i^e \frac{\partial \nu_i^e}{\partial \alpha_i} \right) \right] +$$
$$\frac{1}{2\varepsilon} \sum_{\substack{i=1 \\ \Gamma^e \subseteq \Gamma(\sigma_h)}}^{2} \left[((\lambda_i^e \nu_i^e)^+)^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \operatorname{mes} \Gamma^e + 2 \operatorname{mes} \Gamma^e (\lambda_i^e \nu_i^e) \left(\lambda_i^e \frac{\partial \nu_i^e}{\partial \alpha_i} \right) \right]$$

и $c_1 = (c_{1i})_{i=1}^k$, $c_2 = (c_{2i})_{i=1}^k$ – векторы с координатами

$$c_i^j = \begin{cases} 0 & \text{для } i, \text{ соответствующих треугольникам } \Delta_e, \\ & \text{не имеющим стороны на } \Gamma(\varphi_h) \cup \Gamma(\sigma_h); \\ \operatorname{mes} \Gamma^e (\lambda_i^e \nu_i^e) \nu_i^e & \text{для } i, \text{ соответствующих треугольникам } \Delta_e, \\ & \text{имеющим стороны } \Gamma^e \text{ на } \Gamma(\varphi_h); \\ \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{mes} \Gamma^e (\lambda_i^e \nu_i^e) \nu_i^e & \text{для } i, \text{ соответствующих треугольникам } \Delta_e, \\ & \text{имеющим стороны } \Gamma^e \text{ на } \Gamma(\sigma_h), \end{cases}$$

где $i = 1, \ldots, k; j = 1, 2$.

Рассмотрим вектор $c = (0, \ldots, 0, c_1, c_2)$ размерности $p_0 + 4k$ и определим сопряженное состояние $p \in R^{p_0+4k}$ для задачи оптимального управления как решение системы

$$E_0(\alpha)P + E_1(\alpha)G'(u(\alpha))P = C, \tag{12}$$

где $G'(u)$ – производная Гато оператора G.

Теорема 3. *Частные производные от функционала $J_\varepsilon(\alpha)$ задаются равенствами*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} J(\alpha) = I_0(\alpha) + (P, \frac{\partial F}{\partial \alpha_i}(\alpha) - \frac{\partial E_0}{\partial \alpha_i}(\alpha) w(\alpha) - \frac{\partial E_1}{\partial \alpha_i}(\alpha) G w(\alpha)), i = 1, \ldots, n,$$

где P – решение задачи (12).

Литература

1. *Абушов О.Г., Лапин А.В.* Решение задачи о плотине методом оптимального управления областью // Изв. вузов. Математика. – 1995. – N 4. – С. 12-22.

2. *Абушов О.Г., Лапин А.В.* Решение задачи фильтрации в плотине методом оптимизации формы области: сеточная аппроксимация // Изв. вузов. Математика. - 1996. - N 9. - С. 3-13.

3. *Хаслингер Я., Нейтаанмяки П.* Конечно-элементная аппроксимация для оптимального проектирования формы: теория и приложения. М.: Мир, 1992. - 386 с.

К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКОМ НЕРАВНОВЕСНО ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ГАЗА

Бильченко Н.Г.

Казанский государственный технический университет

В 1960 г. А.А.Дородницын предложил обобщенный метод интегральных соотношений и применил его к решению уравнений пограничного слоя [1]. Особенностью этого метода является то, что он позволяет быстро получить решение задачи на ПЭВМ с необходимой степенью точности. Несмотря на то, что он требует большой предварительной работы по составлению системы аппроксимирующих обыкновенных дифференциальных уравнений, этот метод получил широкое распространение в инженерной практике при расчете аэродинамических характеристик плоских и осесимметричных потоков сжимаемого газа [2,3,4] и трехмерного пограничного слоя [5].

В настоящей работе дается вывод интегральных соотношений для системы уравнений ламинарного пограничного слоя неравновесно диссоциирующего воздуха на проницаемой цилиндрической поверхности, а также приводится аппроксимирующая система третьего приближения для рассматриваемого случая.

1. Вывод интегральных соотношений. Система уравнений, описывающая случай неравновесной диссоциации, имеет вид [6]:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0,$$